

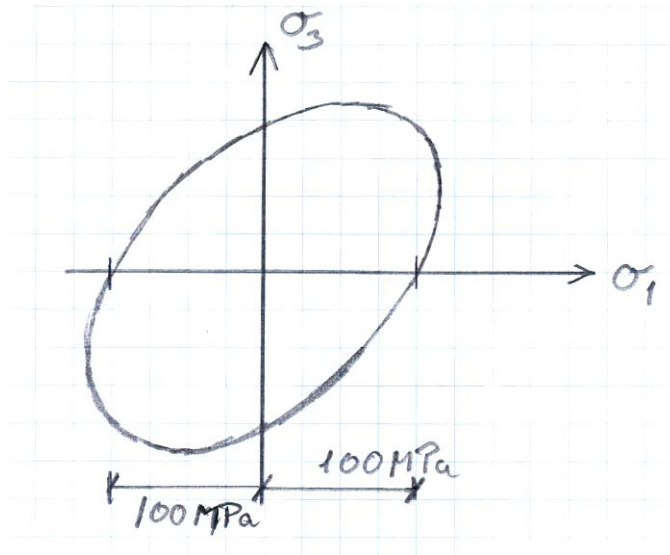
Plasticitetsteori
Opgavebesvarelser

Kapitel 1

Opgave 1

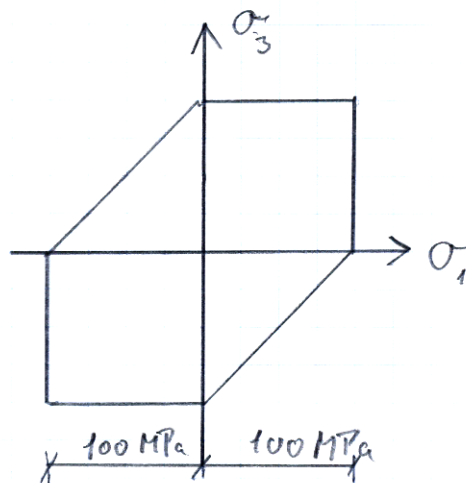
Spm. 1. von Mises brudhypotese er fuldstændig bestemt, når trækstyrken f_t kendes, se (1.10) og (1.11), dvs. JA

Optegning: Plan spændingstilstand $\sigma_2 = 0$ og (1.11) bliver $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = f_t^2$



Spm. 2. Trescas brudhypotese er et specialtilfælde af Coulombs brudhypotese, hvor $\tan \varphi = 0$, dvs. den er fuldstændig bestemt, når trækstyrken f_t kendes, se fig. 1.4, dvs. JA

Optegning: Se fig. 1.4



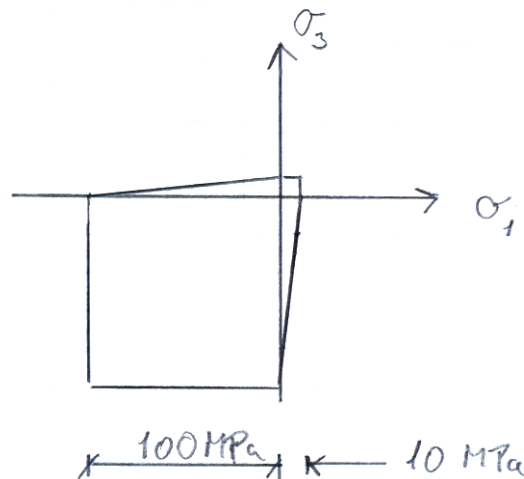
Spm. 3. Coulombs brudhypotese kræver kendskab til to størrelser for at brudhypotesen er fastlagt, se f.eks. (1.8), dvs. NEJ

Opgave 2

Spm.1. von Mises brudhypotese har lige store træk- og trykstyrker, dvs. NEJ

Spm. 2. Trescas brudhypotese har lige store træk- og trykstyrker, dvs. NEJ

Spm. 3. Coulombs brudhypotese kan have forskellige træk- og trykstyrker, se. f.eks. (1.8), dvs. JA
 Optegning: Se fig. til eksempel 1.1



Opgave 3

Anvendes (1.7) findes $k = \frac{f_c}{f_t} = \frac{30}{10} = 3$

Anvendes (1.4) findes $3 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Rightarrow 3 - 3 \sin \varphi = 1 + \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = 30^\circ$

Opgave 4

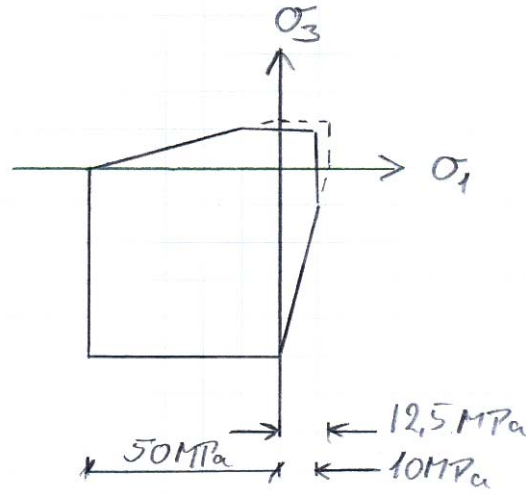
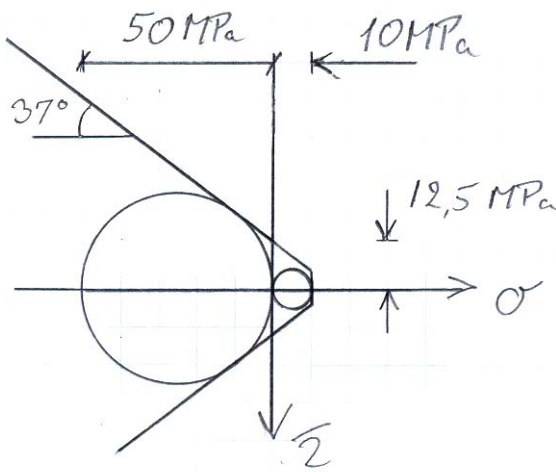
Af (1.5) findes $c = \frac{f_c(1 - \sin \varphi)}{2 \cos \varphi} = \frac{50(1 - \sin 37^\circ)}{2 \cos 37^\circ} = 12,46$

Dermed kan indtegnning i σ, τ -diagram gøres.

Af (1.4) findes $k = \frac{1 + \sin 37^\circ}{1 - \sin 37^\circ} = 4$ og af (1.7) findes trækstyrken, hvis der var tale om Coulombs

brudhypotese, at $f_t = \frac{f_c}{k} = 12,5 MPa$

Dermed kan indtegnning for plan spændingstilstand foretages, se fig. til eks. 1.2



Kapitel 2

Opgave 1

For von Mises flydebetingelse skal gælde $\sum \varepsilon = 0 \Rightarrow 200 + 100 - 300 = 0$ OK (flyder under volumenkonstans) Materialet kan altså godt følge von Mises flydebetingelse.

Sammenhæng mellem tøjninger og spændinger findes af flydeloven (2.2). Fra eksempel 2.2 have

$$\varepsilon_1 = \lambda(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \lambda(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \lambda(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

Der er 3 ligninger med 4 ubekendte, dvs. spændingerne kan ikke findes.

Kendes trækstyrken kan flydebetingelsen (1.11) opskrives og dermed får vi 4 ligninger, dvs. spændingerne kan findes.

Ligningerne opskrives

$$200 = \lambda(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$100 = \lambda(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$$

$$-300 = \lambda(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

og (1.11) skrives som

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - 240^2 = 0$$

Ligning nr. 2 ganges med 2 og trækkes fra ligning 1, hvorefter λ forkortes bort, dvs.

$$4\sigma_1 - 5\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

Ligning nr. 2 ganges med 3 og lægges til ligning 3, hvorefter λ forkortes bort, dvs.

$$-2\sigma_1 + 5\sigma_2 - \sigma_3 = 0$$

For at begge ligninger skal være opfyldt kræves $\sigma_1 = 0$ og dermed at $\sigma_3 = 5\sigma_2$. Indsættes disse værdier i den sidste ligning findes

$$0 + \sigma_2^2 + 25\sigma_2^2 - 0 - \sigma_2 \cdot 5\sigma_2 - 0 - 240^2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 52,3 \text{ MPa}$$

og dermed $\sigma_3 = 262 \text{ MPa}$

Opgave 2

Bruddet sker langs den punkterede linie, der udgør en keglestub. Arealet af keglestubben er

$$A = \frac{\pi h(d + h \tan \varphi)}{\cos \varphi}$$

Det indre arbejde findes af (2.13), idet t erstattes af arealet ovenfor og vinklen sættes til $\alpha = \varphi$.

Det ydre arbejde er P gange V, dvs.

$$PV = \frac{1}{2} V f_c (1 - \sin \varphi) \frac{\pi h (d + h \tan \varphi)}{\cos \varphi} \text{ eller}$$

$$P = \frac{1}{2} f_c (1 - \sin \varphi) \frac{\pi h (d + h \tan \varphi)}{\cos \varphi}$$

Indsættes værdierne findes

$$P = f_c \frac{\pi h (d + 0,75h)}{4}$$

Opgave 3

Det ydre arbejde svarer til det ydre arbejde i eksempel 2.5, men til det indre arbejde anvendes (2.15) i stedet for (2.14) og man finder

$$A_y = \sigma b t V \cos(90 - (\alpha + \beta))$$

$$A_i = W_i \frac{b}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \beta} \frac{1}{2} f_t V (1 + \sin \alpha) t$$

$$A_i = A_y \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} f_t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \beta \sin(\alpha + \beta)}$$

Minimum mht. til β findes for

$$\frac{d\sigma}{d\beta} = 0 \Rightarrow -\sin \beta \sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \tan \beta = \cot(\alpha + \beta)$$

Teknisk Ståbi, side 28 pkt. 1.3.4.3, nederste relation: $\beta = \frac{\pi}{2} - u$ og $\alpha + \beta = u$, dvs. $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

Indsættes sammenhængen i udtrykket for bæreevnen findes mindste bæreevne til

$$\sigma = \frac{1}{2} f_t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} f_t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Formel: $\cos 2v = 2 \cos^2 v - 1 \Rightarrow \cos^2 v = \frac{1}{2}(1 + \cos 2v)$

$$\sigma = \frac{1}{2} f_t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} f_t \frac{1 + \sin \alpha}{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)} = f_t$$

Kapitel 3

Opgave 1

I afstande x fra tværsnittets underside betragtes en smal stribe med tykkelsen dx .

For stykket haves bredden $b_x = h\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ og trækstyrken $f_x = f_t \frac{x}{h}$.

Dermed findes sribens bidrag til trækraften til

$$dN = b_x dx f_x = h\left(1 - \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h} f_t dx$$

Og dermed findes

$$N = \int_{x=0}^h h\left(1 - \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h} f_t dx = h f_t \int_{x=0}^h \left(\frac{x}{h} - \left(\frac{x}{h}\right)^2\right) dx = h f_t \left[\frac{1}{2} \frac{x^2}{h} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{h^2}\right]_0^h = h f_t \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{6} h^2 f_t$$

Resultanten er placeret $\frac{1}{2}h$ fra tværsnittets underside

Opgave 2

$$f_t = 400 \text{ MPa}, f_c = 300 \text{ MPa}$$

En vandret nullinie placeres stykket x nede i kroppen. Ovenover er der træk og nedenunder er der tryk.

Træk- og trykkræfterne opskrives:

$$T = 400(100 \cdot 10 + 10 \cdot x)$$

$$C = 300(100 \cdot 10 + 10(100 - x))$$

Med $T = C$ findes $x = 29$ mm.

Moment om nullinien giver:

$$M = 400 \cdot 100 \cdot 10(5 + 29) + 400 \cdot 10 \cdot 29 \frac{29}{2} + 300 \cdot 100 \cdot 10(5 + 71) + 300 \cdot 10 \cdot 71 \frac{71}{2} = 45,6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Opgave 3

$$f_c = f_t = f_y = 340 \text{ MPa}, \tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} = 196 \text{ MPa}$$

Sammensat tyndfliget tværsnit (3,25)

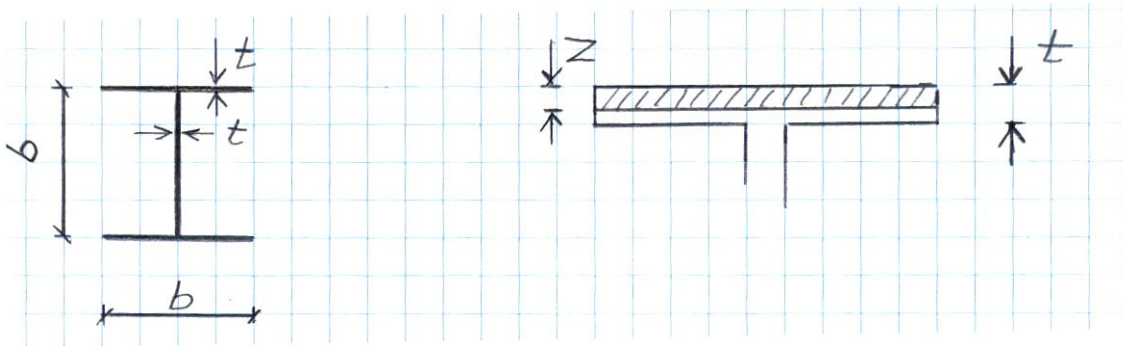
$$T_y = \frac{1}{2} 196 \cdot 3(10^2 \cdot 100) = 2,94 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Opgave 4

I-profilen idealiseres til at hver profil har dimensionerne $b \times t$ og $t \ll b$. Flydespænding f_y .

For normalkraft alene findes $N_0 = 3bt f_y$

For moment alene findes $M_0 = bt f_y b + \frac{1}{2} bt f_y \frac{1}{2} b = \frac{5}{4} b^2 t f_y$



Idet vi lader stykket $z \leq t$ i overflangen være tryk, mens resten er træk findes følgende snitkræfter

$$N = 3bt f_y - 2bz f_y$$

$$M = b^2 z f_y$$

Hermed findes for $z < t$

$$\frac{N}{N_0} = \frac{3bt f_y - 2bz f_y}{3bt f_y} = 1 - \frac{2z}{3t} \text{ eller } \frac{z}{t} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{N}{N_0} \right)$$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{b^2 z f_y}{\frac{5}{4} b^2 t f_y} = \frac{4z}{5t}$$

Heraf findes $\frac{M}{M_0} = \frac{4z}{5t} = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N}{N_0} \right)$

NB. For $z = t$ findes $N = \frac{1}{3} N_0$ og $M = \frac{4}{5} M_0 = b^2 t f_y$ OK

Vi ser nu på z som afstanden fra oversiden til et sted i kroppen. Over z er der tryk og under z er der træk. Tykkelsen t af flangen ses der igen bort fra. Dvs. for $\frac{b}{2} \geq z \geq t$ findes

$$N = bt f_y - 2zt f_y$$

$$M = b^2 t f_y + zt f_y (b - z)$$

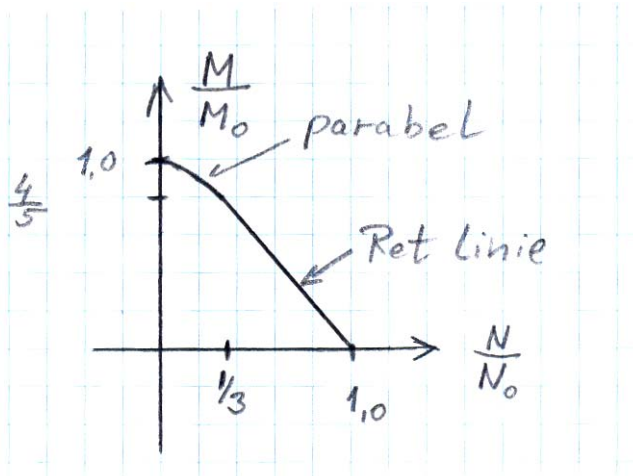
NB. For $z = \frac{b}{2}$ findes $M = \frac{5}{4} b^2 t f_y = M_0$ OK

$$\frac{N}{N_0} = \frac{bt f_y - 2zt f_y}{3bt f_y} = \frac{1}{3} \left(1 - 2 \frac{z}{b} \right) \text{ eller } \frac{z}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - 3 \frac{N}{N_0} \right)$$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{b^2 t f_y + zbt f_y - z^2 t f_y}{\frac{5}{4} b^2 t f_y} = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{z}{b} - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right)$$

Heraf findes $\frac{M}{M_0} = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{4} - \frac{9}{4} \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 \right)$

NB. $N = 0 \Rightarrow M = M_0$ og $N = \frac{1}{3} N_0 \Rightarrow M = \frac{4}{5} M_0$ OK



Opgave 5

$$f_y = 235 \text{ MPa}, \tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} = 136 \text{ MPa}$$

Til bøjning anvendes kun flangerne, dvs. $M_y = (100 \cdot 10) 235 (100 + 5 + 5) = 25,85 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

Til forskydning anvendes kun kroparealet, dvs. $V_y = 100 \cdot 10 \cdot 136 = 136 \cdot 10^3 \text{ N}$

Opgave 6

$$f_y = 235 \text{ MPa}, M_z = 315 \text{ kNm}$$

Bæreevnen ved bøjning om én akse alene findes som i eksempel 3.3, spørgsmål 1:

$$M_{0z} = \frac{1}{4} 150 \cdot 300^2 \cdot 235 \cdot 10^{-6} = 793 \text{ kNm}$$

$$M_{0y} = \frac{1}{4} 300 \cdot 150^2 \cdot 235 \cdot 10^{-6} = 397 \text{ kNm}$$

Brudbetingelsen er lig med fig. 3.14,

Det ses at $M_z < \frac{2}{3} M_{0z}$ og dermed skal (3.53) anvendes.