Syddansk Universitet
Det Tekniske Fakultet

Kapitel 4

Opgave 1

For de enkelte fag gælder (4.6) for momentfordeling og (4.9) for forskydningskraftfordeling. Umiddelbart ses, at det farligste ydrefag er fag AB med længden 8 m.

Først betragtes fag AB. Her er $M_A = 0$, $M_B = -60$ kNm og $l = 8$ m.

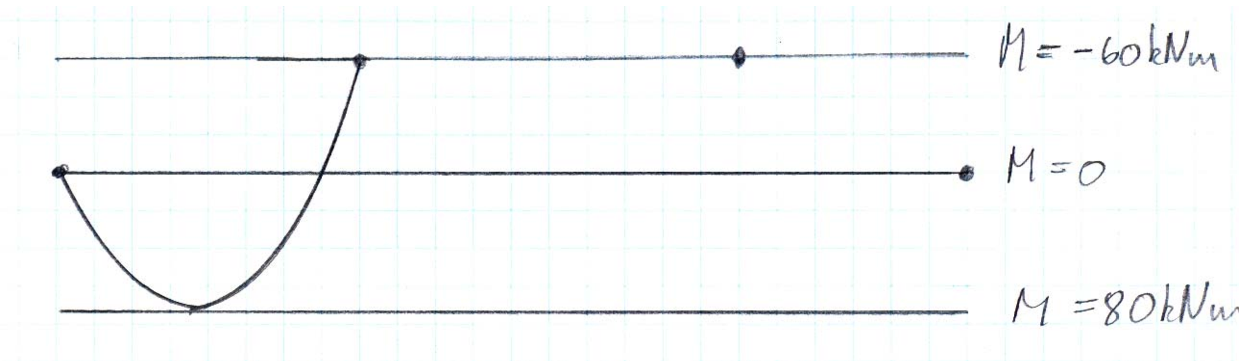
Det maksimale positive moment findes hvor V = 0. Anvendes (4.9) findes

$$V = 0 = \frac{1}{2}p(8-2x) + \frac{0-60}{8} \Rightarrow x = 4 - \frac{7{,}5}{p}$$

Indsættes værdierne i (4.6) og sættes det positive moment til 80 kNm findes

$$M = \frac{1}{2}p\left(4-\frac{7{,}5}{p}\right)\left(8-4+\frac{7{,}5}{p}\right) - \frac{60}{8}\left(4-\frac{7{,}5}{p}\right) = 80$$
$$\Rightarrow (2p-3{,}75)\left(4+\frac{7{,}5}{p}\right) - 7{,}5\left(4-\frac{7{,}5}{p}\right) = 80$$
$$\Rightarrow 8p - 15 + 15 - \frac{28{,}125}{p} - 30 + \frac{56{,}25}{p} = 80$$
$$\Rightarrow 8p^2 + 28{,}125 - 110p = 0$$

Ligningen har to løsninger $p = \begin{cases} 13{,}49 kN/m \\ 0{,}261 kN/m \end{cases}$ hvor kun den øverste giver en brugelig værdi. (ses ved at finde x for de fundne værdier af p)



For midterfaget anvendes (4.8) idet M' = -60 kNm. Det maksimale moment M = 80 kNm og findes på midten, dvs. x = *l*/2 og *l* = 10 m.

$$80 = \frac{1}{8}p10^2 - 60 \Rightarrow p = 11{,}2 kN/m$$

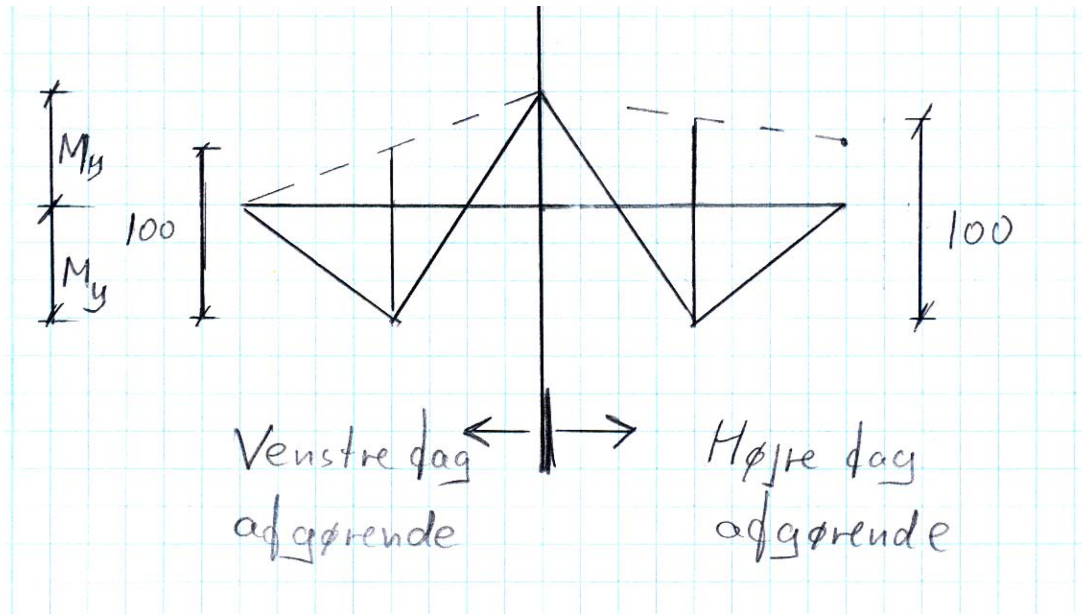
Midterfaget kan altså bære mindst og en nedreværdi for bæreevnen er der p = 11,2 kN/m.

Opgave 2
Udkragningen til højre giver et indspændingsmoment over understøtningen på $M = -10 \cdot 4 = -40 kNm$.

Det simple moment for enkeltkraften i begge fag er $M = \frac{1}{4} 50 \cdot 8 = 100 kNm$.

Over midterste understøtning kan indspændingsmomentet blive $-M_y$, og ved understøtningerne er randbetingelserne henholdsvis M = 0 og M = -40 kNm.

Umiddelbart ses at ophænges den simple momentkurve i venstre fag i henholdsvis 0 og –My bliver det positive moment større, end hvis det ophænges i højre fag i henholdsvis –40 kNm og $-M_y$.



Geometrisk findes i venstre fag at $100 = M_y + \frac{1}{2} M_y \Rightarrow M_y = 66{,}7 kNm$

Opgave 3
Udkragningen til højre giver et indspændingsmoment over understøtningen på $M = -5 \cdot 4 \cdot 2 = -40 kNm$.

Igen er det faget til venstre, der er afgørende, under forudsætning af at momenterne bliver større end 40 kNm

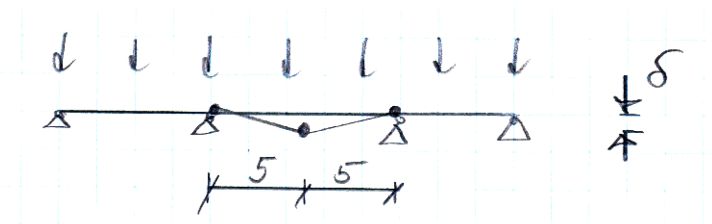
Igen anvendes formlerne (4.6) og (4.9)

Af (4.9) findes $V = \frac{1}{2} 5(8 - 2x) - \frac{M}{8} \Rightarrow x = 4 - \frac{M}{40}$
Der indsættes i (4.6)

$$M = \frac{1}{2}5\left(4-\frac{M}{40}\right)\left(8-4+\frac{M}{40}\right)-\frac{M}{8}\left(4-\frac{M}{40}\right)$$
$$\Rightarrow M = 2{,}5\left(4-\frac{M}{40}\right)\left(4+\frac{M}{40}\right)-\frac{M}{8}\left(4-\frac{M}{40}\right)$$
$$\Rightarrow M = 40-\frac{M^2}{640}-\frac{M}{32}+\frac{M^2}{320}$$
$$\Rightarrow M^2 - 960M + 25600 = 0$$

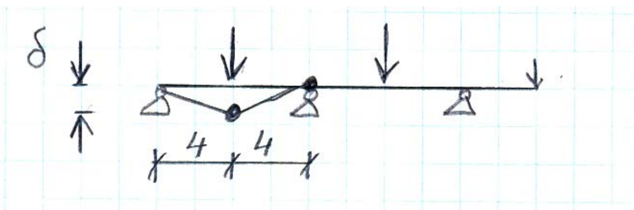
der har løsningerne $M = \begin{cases} 27{,}5kNm \\ 932kNm \end{cases}$ heraf er det kun den øverste, der er anvendelig.
Da udkragningen kræver et negativt flydemoment på 40 kNm, er det denne værdi, der er dimensionsgivende.

Opgave 4
Som opgave 1. Midterste fag. undersøges



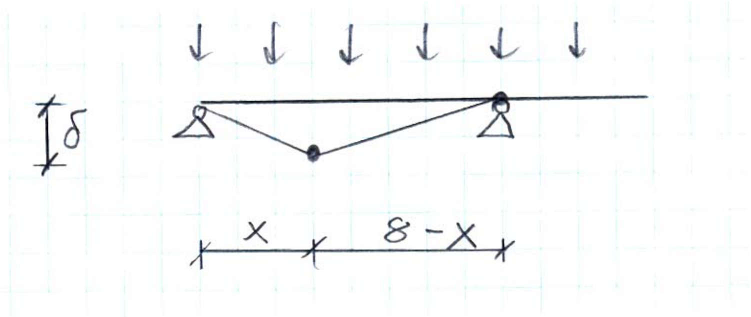
$$\theta = \frac{\delta}{5}$$
Arbejdsligningen giver:
$$p10\frac{\delta}{2} = 60\theta + 80\cdot 2\theta + 60\theta = 280\theta = 56\delta$$
$$\Rightarrow p = 11{,}2kN/m$$
Der er sammenfald med nedreværdien, dvs. løsningen er eksakt

Som opgave 2. Venstre fag undersøges



$$\theta = \frac{\delta}{4}$$
Arbejdsligningen giver:
$$50\delta = M_y 2\theta + M_y\theta = 3M_y\theta = \frac{3}{4}M_y\delta$$
$$\Rightarrow M_y = 66{,}7kNm$$
Der er sammenfald med løsningen fra nedreværdimetoden, dvs. løsningen er eksakt

Som opgave 3. Venstre fag undersøges, idet flydeleddet i bjælken placeres stykket x fra venstre vederlag.



$\theta_A = \frac{\delta}{x}$, $\theta_B = \frac{\delta}{8-x}$, $\theta_C = \theta_A + \theta_B$

Arbejdsligningen giver:

$$5 \cdot 8 \frac{\delta}{2} = M_y(\theta_A + \theta_B) + M_y\theta_B \Rightarrow 20\delta = M_y\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{8-x}\right)\delta \Rightarrow 20 = M_y \frac{8+x}{x(8-x)}$$

$$\Rightarrow M_y = 20\frac{x(8-x)}{8+x}$$

Ekstremum findes af

$$\frac{dM_y}{dx} = 0 \Rightarrow x(8-x) = (8+x)(8-2x) \Rightarrow 8x - x^2 = 64 - 16x + 8x - 2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16x - 64 = 0$$

Der har den brugelige løsning x = 3,31m. Indsættes i udtrykket for M_y findes M_y = 27,5kNm.

Løsningen ses at være sammenfaldende med nedreværdimetodens løsning, men da udkragningen kræver flydemomentet er 40 kNm, bliver det også i dette tilfælde løsningen.

Opgave 5

De flydemekanismer, der kan komme på tale er principielt vist på fig. 4.2, idet der dog er traditionelle charnier ved understøtningerne A og B, dvs. $M_A = M_B = 0$, og de bidrager ikke til det indre arbejde.

I eksempel 4.8 udelukkedes bjælkemekanismen, svarende til fig. 4.20a, idet kun 2 flydeled er nødvendige. Gennemregning af mekanismen er dog hurtig.

Mekanisme 4.20a: $\theta_B = \theta_C = \theta = \frac{\delta}{4}$, $\theta_{BC} = \theta_B + \theta_C = 2\theta = \frac{\delta}{2}$

Arbejdsligningen giver: $20 \cdot 8\frac{\delta}{2} = M_y 4\theta = M_y\delta \Rightarrow M_y = 80kNm$

Mekanisme 4.20b: $\theta_B = \theta_C = \theta = \frac{\delta}{6}$

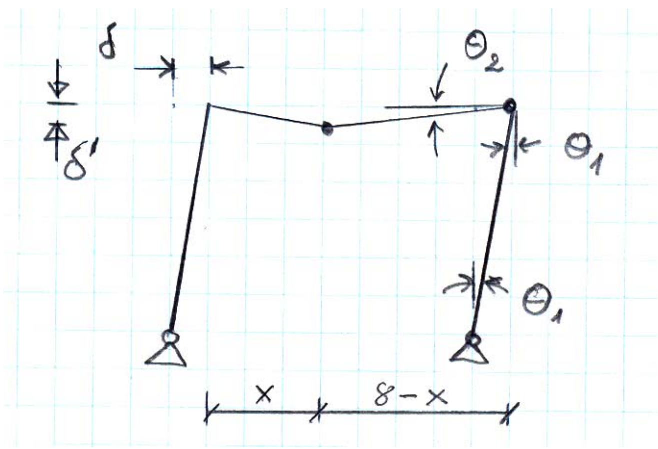
Arbejdsligningen giver: $10 \cdot 6\frac{\delta}{2} + 5 \cdot 6\frac{\delta}{2} = M_y \frac{\delta}{6}2 \Rightarrow M_y = 135kNm$

Mekanisme 4.20c: $\theta_A = \theta_D = \theta = \frac{\delta}{6}, \;\; \theta_{BC} = \theta_C = 2\theta = \frac{\delta}{3}, \;\; \delta_{AB} = \delta\frac{4}{6}$

Arbejdsligningen giver: $10 \cdot 6\frac{\delta}{2} + 5 \cdot 6\frac{\delta}{2} + 20 \cdot 8\frac{\delta}{2}\frac{4}{6} = M_y \frac{\delta}{3}2 \Rightarrow M_y = 147{,}5kNm$

Da det er øvreværdiløsninger gælder det om at finde mindst bæreevne – eller størst flydemoment, så løsningen fra mekanisme 4.20c er gældende.

Med udgangspunkt i fig. 4.20c kan en endnu bedre værdi findes, hvis flydeleddet i rammens rigle placeres i afstande x fra B, se figur.



$\delta' = \delta\frac{x}{6}, \;\; \theta_1 = \frac{\delta}{6}, \;\; \theta_2 = \frac{\delta'}{8-x} = \delta\frac{x}{6(8-x)}$

Det ydre arbejde: $A_y = 10 \cdot 6\frac{\delta}{2} + 5 \cdot 6\frac{\delta}{2} + 20 \cdot 8\frac{\delta}{2}\frac{x}{6} = \delta(30 + 15 + 13{,}3333x)$

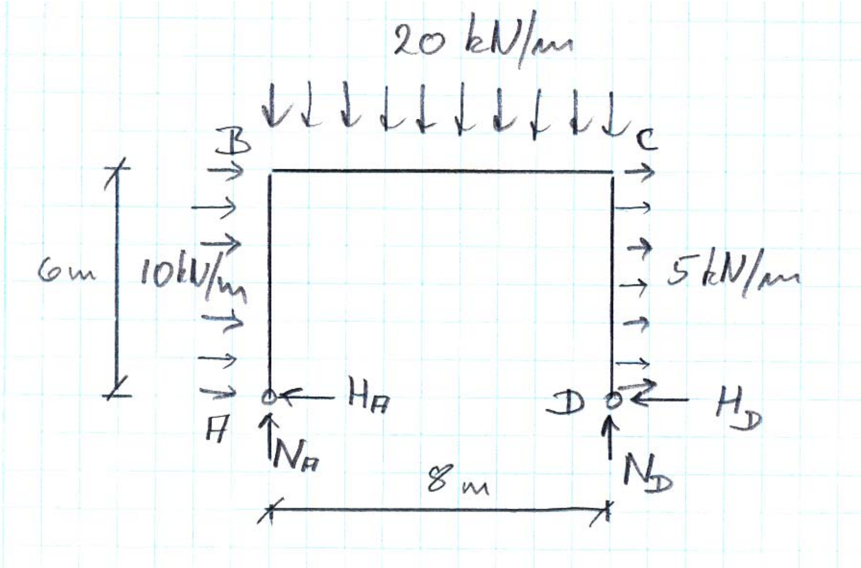
Det indre arbejde: $A_i = M_y\left(\frac{\delta}{6} + \delta\frac{x}{6(8-x)}\right)2 = M_y\frac{8}{3(8-x)}\delta$

Med $A_y = A_i \Rightarrow M_y\frac{8}{3(8-x)} = 45 + 13{,}3333x \Rightarrow M_y = -5x^2 + 23{,}125x + 135$

Ekstremum findes for $\frac{dM_y}{dx} = 0 \Rightarrow -10x + 23{,}125 = 0 \Rightarrow x = 2{,}31m$

Indsættes i udtrykket for M_y findes M_y = 161,7 kNm, altså knap 10% større værdi end ved flydeleddet placeret midt i riglen.

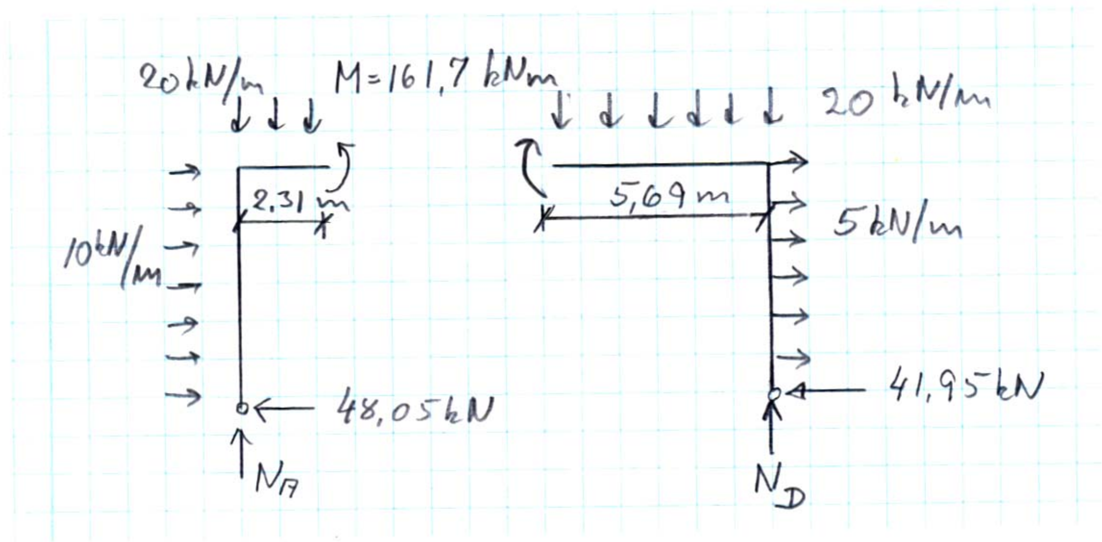
Reaktionerne findes:



$M_C = 161{,}7 = H_D 6 - 5 \cdot 6^2 \frac{1}{2} \Rightarrow H_D = 41{,}95kN$

$H_A + H_D = 10 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \Rightarrow H_A = 48{,}05kN$

Lodret reaktion findes ved at tage moment af venstre del af rammen om maksimummomentpunktet i riglen.



$M = 161{,}7 = 48{,}05 \cdot 6 + N_A 2{,}31 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 20 \cdot 2{,}31^2 \frac{1}{2} \Rightarrow N_A = 46{,}2kN$

På tilsvarende måde for højre del af rammen

$M = 161{,}7 = N_D 5{,}69 + 5 \cdot 6 \cdot 3 - 20 \cdot 5{,}69^2 \frac{1}{2} - 41{,}95 \cdot 6 \Rightarrow N_D = 113{,}7kN$

Kontrol: $N_A + N_D = 159{,}9kN \approx 8 \cdot 20 = 160kN$

Moment i B: $M_B = 48{,}05 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 108{,}3kNm$

Dermed kan momentkurven optegnes.